(223) S61

Man kann sich leicht eine Sprache denken, in der es keine Frage- und keine Befehlsform gibt, sondern in der Frage und Befehl in der Form der Behauptung ausgedrückt wird, in Formen z.B., ~~denen in unserer Sprache~~ entsprechend unserem: "Ich möchte wissen, ob .... " und "Ich wünsche, dass .... ".

Formen

Niemand würde doch von einer Frage (etwa, ob es draussen regnet) sagen, sie sei wahr oder falsch. Es ist freilich deutsch, dies von einem Satz, "ich wünsche zu wissen, ob .... ", zu sagen. Wenn nun aber diese Form immer statt der Frage verwendet ~~wird~~ würde ?-

Die grosse Mehrzahl der Sätze, die wir aussprechen, schreiben und lesen, sind Behauptungssätze.

Und - sagst Du - diese Sätze sind wahr oder falsch. Oder, wie ich auch sagen könnte, mit ihnen wird das Spiel der Wahrheitsfunktionen gespielt. Denn die Behauptung ist nicht etwas, was zu dem Satz hinzutritt, sondern ein wesentlicher Zug des Spiels, das wir mit ihm spielen. Etwa vergleichbar dem Charakteristikum des Schachspiels, dass es ein Gewinnen und Verlieren dabei gibt, und dass der gewinnt, der dem Andern den König nimmt. Freilich, es könnte ein dem Schach

in gewissem Sinne

sehr verwandtes Spiel geben, dass darin besteht, dass man die Schachzüge macht, aber ohne dass es dabei ein Gewinnen und Verlieren gibt, oder die Bedingungen des Gewinnens sind andere.

562

Denke, man sagte: Ein Befehl besteht aus einem Vorschlag ('Annahme') und dem Befehlen des Vorgeschlagenenen.

Könnte man nicht Arithmetik treiben, ohne auf den Gedanken zu kommen, arithmetische S ä t z e auszusprechen, und ohne das uns die Ahnlichkeit einer Multiplikation mit einem Satz je auffiele ?

Aber würden wir nicht den Kopf schütteln, wenn Einer uns eine falsch gerechnete Multiplikation zeigte, wie wir es tun, wenn er uns sagt, es regne, wenn es nicht regnet? – Doch; und hier liegt ein Punkt der Anknüpfung. Wir machen aber auch abwehrende Gesten, wenn ~~ein~~ unser Hund z.B. sich nicht so benimmt, wie wir es ~~wünschen~~ möchten. //sich benimmt, wie wir es nicht wünschen.//

Wir sind gewohnt, zu sagen "2 mal 2 ist 4" und das Verbum "ist" macht dies ~~zum~~ zum Satz und stellt scheinbar eine nahe Verwandschaft her mit allem, was wir 'Satz' nennen. Während es sich nur um eine sehr ~~äusserliche~~ oberflächliche Beziehung handelt.

Wo es bei Euklid heisst: das und das sei zu k o n s t r u i e r e n und am Schluss "q.e.c.", könnte man auch setzen: es sei zu b e w e i s e n , dass das die Konstruktion dieser Figur sei und am Schluss schreiben "q.e.d.", also das Resultat auf die F o r m ~~des~~ eines bewiesenen S a t z e ~~s~~ bringen.

S63

Gibt es wahre Sätze in Russell's System, die nicht in seinem System zu beweisen sind ?- Was nennt man denn einen wahren Satz in Russel's System ?

Was heisst denn, ein Satz 'i s t w a h r' ? p i s t w a h r = p. (dies ist die Antwort.)

Man will also etwa fragen: Unter welchen Umständen behauptet man einen Satz ? Oder: Wie wird die Behauptung des Satzes im Sprachspiel gebraucht ? Und die "Behauptung des Satzes" ist hier entgegensetzt dem Aussprechen des Satzes etwa als Sprachübung,- oder als T e i l eines andern Satzes, u.dergl..

Fragt man also in diesem Sinne: "Unter welchen Umständen behauptet man in Russell's Spiel einen Satz", so ist die Antwort: Am Ende eines seiner Beweise, oder als 'Grundgesetz' (p.p.). Anders werden in diesem System Behauptungssätze in den Russell'schen Symbolen nicht verwendet.

"Kann es aber nicht wahre Sätze geben, die in diesem Symbolismus angeschrieben sind, aber in dem System Russell's nicht beweisbar ?"- 'Wahre Sätze', das sind also Sätze, die in einem a n d e r n System wahr sind, d.h. in einem andern Spiel mit Recht behauptet werden können. Gewiss; warum soll es keine solchen Sätze geben; oder vielmehr: warum soll man nicht Sätze - der Physik, z.B. - in Russell's Symbolen anschreiben ? Die Frage ist ganz analog der: Kann es wahre

Sätze in Euklids Sprache geben, die in seinem System nicht beweisbar, aber wahr sind ?- Aber es gibt ja sogar Sätze, die in Euklid's System beweisbar, aber in einem andern System f a l s c h sind. Können nicht Dreiecke - in einem andern System - ähnlich (s e h r ähnlich) sein, die nicht ~~gleiche~~ die gleichen Winkel haben ? - " Aber das ist doch ein Witz ! Sie sind ja dann nicht im selben Sinne einander 'ähnlich' !" - Freilich nicht; und ein Satz, der nicht in Russell's System zu beweisen ist, ist in anderm Sinne "wahr" oder "falsch", als ein Satz der 'Principia Math.'.

Ich stelle mir vor, es fragte mich Einer um Rat; er sagt: "Ich habe einen Satz (ich will ihn ~~xx~~ mit "P" bezeichnen) in Russell's Symbolen konstruiert, und den kann man durch gewisse Definitionen und Transformationen so deuten, dass er sagt: "P" ist nicht in Russell's System beweisbar. //auch in der Form aussprechen: 'P ist (in Russell's System) nicht beweisbar'// Muss ich nun von diesem Satz nicht sagen: einerseits, er sei wahr, anderseits er sei unbeweisbar ? Denn angenommen, er wäre falsch, so ist es also wahr, dass er beweisbar ist ! Und das kann doch nicht sein. Und ist er bewiesen, so ist bewiesen, dass er nicht beweisbar ist ! So kann er also nur wahr, aber unbeweisbar sein."

So wie wir fragen: "in welchem System 'beweisbar' ?", so müssen wir auch fragen: "in welchem System 'wahr' ?". 'In Russell's System wahr' heisst, wie gesagt: in Russell's

System bewiesen; und 'in Russell's System falsch' heisst: das Gegenteil sei in Russell's System bewiesen.- Was heisst nun Dein : "angenommen, er sei falsch"? I n R u s s e l l ' s S i n n e heisst es: "angenommen das Gegenteil sei in Russell's System bewiesen"; i s t d a s D e i n e A n n a h m e , so wirst Du jetzt die Deutung, er sei unbeweisbar, wohl aufgeben. Und unter dieser Deutung verstehe ich die Ubersetzung in diesem deutschen Satz.- Nimmst Du an, der Satz sei in Russell's System beweisbar, so ist er damit i n R u s s e ll' s S i n n e wahr und die Deutung "P ist nicht beweisbar" ist wieder aufzugeben. Nimmst Du an, der Satz sei in Russell's Sinne wahr, so folgt das ~~Gleich~~ G l e i c h e . Ferner: soll der Satz in einem andern als Russell's Sinne falsch sein: so widerspricht dem nicht, dass er in Russell's System bewiesen ist. (Was im Schach "verlieren" heisst, kann doch in einem andern Spiel das Gewinnen ausmachen.) //,darin kann doch in einem andern Spiel das Gewinnen bestehen.//

Was heisst es denn: "P" und "P ist unbeweisbar" seien der gleiche Satz ? Es heisst, dass diese z w e i deutschen Sätze in der und der Notation e i n e n Ausdruck haben.

"Aber P kann doch nicht beweisbar sein, denn, angenommen es wäre bewiesen, so wäre der Satz bewiesen, er sei nicht beweisbar." Aber wenn dies nun bewiesen wäre, oder wenn ich glaubte - vielleicht durch Irrtum - ich hätte es bewiesen, warum sollte ich den Beweis nicht gelten lassen und sagen, ich müsse meine Deutung "unbeweisbar" zurückziehen ?

Nehmen wir an, ich beweise die Unbeweisbarkeit (in Russell's System) von P; so habe ich mit diesem Beweis P bewiesen. Wenn nun dieser Beweis einer in Russell's System wäre,- dann hätte ich also zu gleicherzeit seine Zugehörigkeit und Unzugehörigkeit zum Russell'schen System bewiesen.- Das kommt davon, wenn man solche Sätze bildet.- Aber hier wäre ist ja ein Widerspruch !- Nun so ist hier ein Widerspruch. Schadet er hier etwas ?

Schadet der Widerspruch, der entsteht wenn Einer sagt: "Ich lüge.- Also lüge ich nicht.- Also lüge ich.- Etc." Ich meine: ist unsere Sprache dadurch weniger brauchbar, dass man in diesem Fall aus einem Satz nach den gewöhnlichen Regeln sein Gegenteil und daraus wieder ihn folgern kann ?- der Satz selbst ist unbrauchbar, und ebenso dieses Schlüsseziehen; aber warum soll man es nicht tun ?- Es ist eine brotlose Kunst !- Es ist ein Sprachspiel, das Ähnlichkeit mit dem Spiel des Daumenfangens hat.

567

Interesse erhält so ein Widerspruch nur dadurch, dass er Menschen gequält hat und dadurch zeigt, wie aus der Sprache quälende Probleme wachsen können; und was für Dinge uns quälen können.

Ein Beweis der Unbeweisbarkeit ist quasi ein geometrischer Beweis; ein Beweis, die Geometrie der Beweise betreffend. Ganz analog einem Beweise etwa, dass die und die Konstruktion nicht mit Zirkel und Lineal ausführbar ist. Nun enthält so ein Beweis ein Element der Vorhersage, ein physikalisches Element. Denn als Folge dieses Beweises sagen wir ja einem Menschen: "Bemüh' Dich nicht, eine Konstruktion (der Dreiteilung des Winkels, etwa) zu finden, - man kann beweisen, dass es nicht geht." Das heisst: es ist wesentlich, dass sich der Beweis der Unbeweisbarkeit in dieser Weise soll anwenden lassen. Er muss - könnte man sagen - für uns ein t r i f t i g e r G r u n d sein, die Suche nach einem Beweis (also einer Konstruktion der und der Art) aufzugeben.

Ein Widerspruch ist als eine solche Vorhersage unbrauchbar.

Ob etwas mit Recht der Satz genannt wird "X ist unbeweisbar", hängt davon ab, wie wir diesen Satz beweisen. Nur der Beweis zeigt, was als das Kriterium der Unbeweisbarkeit gilt. Der Beweis ist ein Teil des Systems von Operationen, des Spiels, worin der Satz gebraucht wird, und zeigt uns seinen 'Sinn'.

Es ist also die Frage ob der „Beweis der Unbeweisbarkeit" von p hier ein triftiger Grund ist zur Annahme dass ein Beweis von p nicht gefunden werden wird.

568

Der Satz "p ist unbeweisbar' hat einen andern Sinn, nach dem - als ehe er bewiesen ist.

Ist er bewiesen, so ist er die Schlussfigur des Unbeweisbarkeitsbeweises.- Ist er unbewiesen, so ist ja noch nicht k l a r , w a s als Kriterium seiner Wahrheit zu gelten hat, und sein Sinn ist - kann man sagen - noch verschleiert.

Wie,soll ich nun annehmen, ist P bewiesen ? Durch einen Unbeweisbarkeitsbeweis ? oder auf eine andere Weise ? Nimm an, durch einen Unbeweisbarkeitsbeweis. Nun, um zu sehen, w a s bewiesen ist, schau auf den Beweis ! Vielleicht ist hier bewiesen, dass die und die Form des Beweises nicht zu P führt.- Oder, es sei P auf eine direkte Art bewiesen - wie ich einmal sagen will -, dann folgt also der Satz "P ist unbeweisbar", und es muss sich nun zeigen, wie diese Deutung der Symbole von P mit der Tatsache des Beweises kollidiert und warum sie hier aufzugeben sei.

Angenommen aber, sei bewiesen.- W i e bewiesen ? Etwa dadurch, dass P direkt bewiesen ist - denn daraus folgt, dass es beweisbar ist, also . Was soll ich nun aussagen: "P", oder " P" ? Warum nicht beides ? Wenn mich jemand fragt: "Was ist der Fall - P, oder nicht-P ?", so antworte ich: " P" steht am Ende eines Russell'schen Beweises, Du schreibst also im Russell'schen System: " P"; anderseits ist es aber eben beweisbar und dies drückt man durch " P"

S69

aus, dieser Satz aber steht nicht am Ende eines Russel'schen
Beweises, gehört also nicht zum Russell'schen System.- Als
die Deutung "P ist unbeweisbar" für P gegeben wurde, da kannte
den muss
man ja diesen Beweis für P nicht und man kann also nicht sa-
gen, "P" sage: d i e s e r Beweis existierte nicht.- Ist der
konstruiert
Beweis hergestellt, so ist damit eine n e u e L a g e ge-
schaffen: Und wir haben nun zu entscheiden, ob wir d i e s
einen Beweis (n o c h einen Beweis), oder ob wir d i e s
noch die Aussage der Unbeweisbarkeit nennen wollen.

Angenommen P sei direkt bewiesen; es ist also bewiesen, dass sich P direkt beweisen lässt ! Das ist also wieder eine Frage der Deutung - es sei denn, dass wir nun auch einen direkten Beweis von P haben. Wäre es nun so, nun, so wäre es so.-

(Die abergläubische Angst und Verehrung der Mathematiker vor dem Widerspruch.)

"Aber angenommen, der Satz wäre nun f a l s c h - und daher beweisbar !-" Warum nennst Du ihn 'falsch'? Weil Du einen Beweis siehst ?- Oder aus andern Gründen ? Dann macht es ja nichts. Man kann ja den Satz des Widerspruchs sehr wohl falsch nennen, mit der Begründung z.B., dass wir sehr oft mit gutem Sinn auf eine Frage antworten:
desgleichen
"Ja, und nein." Und ebenso wenn Satz " ": weil wir die Verdoppelung der Verneinung als eine V e r s t ä r k u n g der Verneinung verwenden und nicht bloss als ihre Aufhebung.

S610

~~Duxsagtxxx~~

Du sagst: "......" also ist P wahr und unbeweisbar." Das heisst wohl: "Also P. " Von mir aus - aber zu welchem Zweck schreibst Du diese 'Behauptung' hin ? (Das ist, als hätte jemand aus gewissen Prinzipien über Naturformen und Baustiel abgeleitet, auf den Mount Everest, wo niemand wohnen kann, gehöre ein Schlösschen im Barockstiele.) Und wie könntest Du mir die Wahrheit der Behauptung plausibel machen, da Du sie ja zu nichts weiter brauchen kannst als zu jenen Kunststückchen ?

Man muss sich hier daran erinnern, dass die Sätze der Logik so konstruiert sind, dass sie als Information k e i n e Anwendung in der Praxis haben. Man könnte also sehr wohl sagen, sie seien garnicht S ä t z e ; und dass man sie überhaupt hinschreibt, bedarf einer Rechtfertigung. Fügt man diesen 'Sätzen' nun ein weiteres ~~S~~ satzartiges Gebilde andrer Art hinzu, so sind wir hier schon erst recht im Dunkeln darüber, was dieses System von Zeichenkombinationen nun für eine Anwendung, für einen Sinn haben soll, denn der blosse S a t z k l a n g dieser Zeichenverbindungen gibt ihnen ja eine Bedeutung noch nicht.